Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

59. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

591211

Gegeben ist die Funktion f, die für reelle Zahlen x mit $|x| \leq 3$ durch die Gleichung $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ definiert ist.

a) Eine zweite Funktion g wird durch $g(x) = 2 - \sqrt{9 - x^2}$ definiert.
Man untersuche, ob die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen, und berechne gegebenenfalls deren Koordinaten.

b) Es sei a eine reelle Zahl. Die Funktion g_a wird für $-3 \leq x \leq 3$ durch die Gleichung $g_a(x) = a - \sqrt{9 - x^2}$ definiert.
Man untersuche in Abhängigkeit von a, ob der Graph von f und der Graph von g_a gemeinsame Punkte besitzen, und berechne gegebenenfalls deren Koordinaten.

591212

Ein Quadrat $ABCD$ wird durch eine Gerade g in zwei Teile mit gleichem Flächeninhalt zerlegt.

Man beweise, dass dann der Diagonalenschnittpunkt M des Quadrats $ABCD$ auf der Geraden g liegt.

591213

Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, die die Gleichung

$$20x^2 - 19y^2 = 2\,019$$

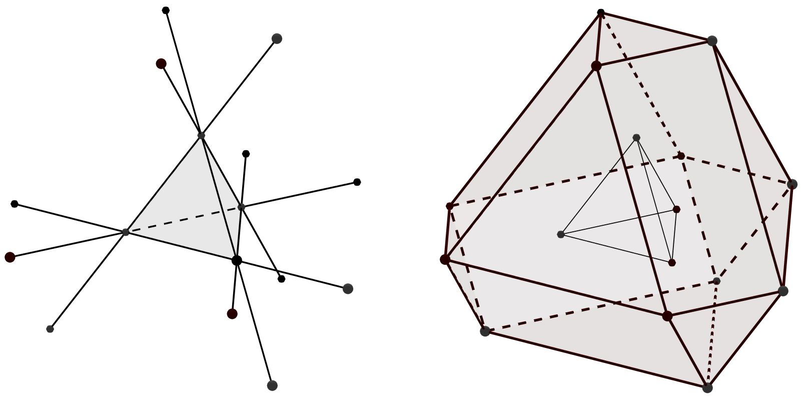
erfüllen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

591214

Gegeben sei ein reguläres Tetraeder T der Kantenlänge a. Man verlängert alle Kanten von T über alle Eckpunkte hinaus jeweils um a. Auf diese Weise entstehen zwölf neue Punkte.

Wie groß ist das Volumen des von diesen zwölf Punkten wie in Abbildung A 591214 a aufgespannten Körpers in Abhängigkeit vom Volumen V des Tetraeders T?

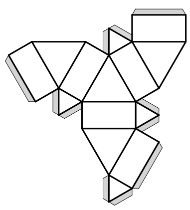


A 591214 a

Hinweis: Ein Netz dieses Körpers zum Ausschneiden und Basteln, das eine vergrößerte Version von Abbildung A 591214 b ist, lässt sich ab 1. September 2019 unter der URL

`https://www.mathematik-olympiaden.de/aufgaben/59/1/A591214-Beilage.pdf`

im World Wide Web finden.



A 591214 b